ЛЕКЦИЯ № 5

Дополнительный материал к лекции о задаче Кеплера при финитном движении.

«Путем исключительно кропотливых доказательств,
обработав очень много наблюдений, я нашел, что
пути планет на небе – не круг, а овальная, точнее
эллиптическая орбита» И.Кеплер

Задача двух тел с массами m_1 и m_2 и потенциалом взаимодействия $U=-\alpha/|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$ решается в системе центра инерции после помещения центра координат в точку расположения одной частицы с массой m_2. При этом задача сводится к движению тела с приведенной массой $m=m_1m_2/(m_1+m_2)$ и координатой $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$ в эффективном потенциале $U_{ef}=-\alpha/r+M^2/2mr^2$, где $\vec{M}$ – угловой момент системы в системе отсчета, связанной с центром инерции (*ци* на Рис.1). Профиль эффективного потенциала изображен на Рис.2. Характерные параметры этого потенциала, описывающие глубину потенциальной ямы и ее расстояние от центра поля такие:

$$-E_0=-m\alpha^2/2M^2, \qquad p=M^2/m\alpha. \tag{5.1}$$

Исходная задача обладала двумя интегралами движения: полной энергии E и угловым моментом M. Соотношения (5.1) дают связь этих характеристик орбиты с двумя другими, принятыми в астрономии: параметром p и эксцентриситетом

$$e=\sqrt{1+E/E_0}\,. \tag{5.2}$$

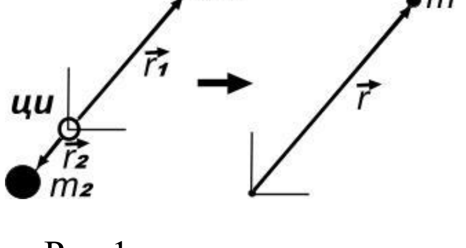

Рис.1

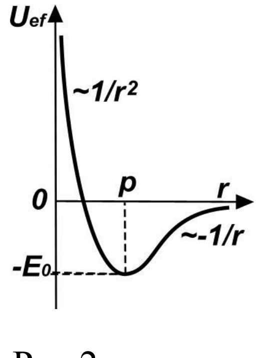

Рис.2

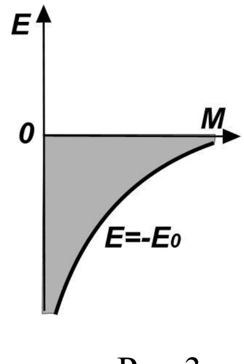

Рис.3

Область параметров, соответствующих вращению двух тел вокруг центра инерции, заштрихована на Рис.3. Ей отвечают значения эксцентриситета $0 \le e \le 1$. Форма орбиты в цилиндрических координтах определяется общим для задач динамики двух тел соотношением

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{ef}(r)}} . \qquad (5.3)$$

При этом вращение приведенной массы вокруг центра потенциала происходит по эллипсу. Его форма в цилиндрических и декартовых координатах определяются формулами:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \qquad \frac{(x + e \cdot a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (5.4)$$

в которых большая a и малая b полуоси эллипса определяются через параметры (p,e) или (E,M) соответственно формулами (см. Рис.4):

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}} . \qquad (5.5)$$

Наименьшее расстояние до центра поля (точки *перигелия* A) составляет $r_{\min} = p/(1+e)$, а максимальное (точки *апогея* B) – $r_{\max} = p/(1-e)$. Все характерные размеры орбиты приведены на Рис.4. Рассмотренный потенциал $U \sim 1/r$, наряду с гармоническим потенциалом $U \sim r^2$, являются единственными, для которых при любых допустимых величин (E,M) все траектории замкнуты и имеют вид эллипсов. При движении вдоль орбиты радиус движения периодически меняется с частотой $\omega_r = (2|E|)^{3/2} / (m\alpha^2)^{1/2} = \sqrt{\alpha / ma^3}$. С этой же частотой меняется фаза вращения $\omega_\varphi = \omega_r$. Такое вырождение связано с наличием при данном виде потенциала дополнительного интеграла движения $\vec{J} = [\dot{\vec{r}}, \vec{M}] - \alpha\, \vec{r} / r$.

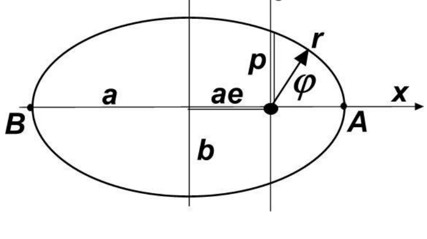

Рис.4

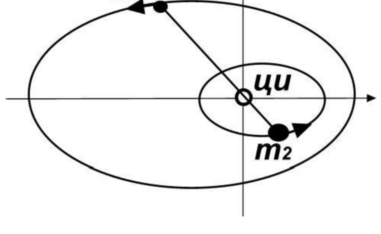

Рис.5

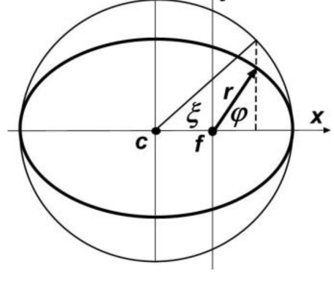

Рис.6

Для возвращения в лабораторную систему (в простейшем случае– в систему, связанную с центром инерции) надо воспользоваться соотношениями $\vec{r}_1 = \vec{r} m_2 / (m_1 + m_2)$ и $\vec{r}_2 = -\vec{r} m_1 / (m_1 + m_2)$ с $\vec{r}$ из (4). Две массы синфазно вращаются вокруг центра инерции по своим эллипсам. В каждый момент времени центр инерции (*ци*) лежит на прямой между точками расположения масс. На Рис.5 приведена картина движения при $m_2 > m_1$.

Конкретное движение частицы вдоль траектории определяется в неявной форме формулами

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{ef}(r)}}, \tag{5.6}$$

$$\varphi(t) = \frac{M}{m} \int \frac{dt}{r^2(t)}. \tag{5.7}$$

Подразумевается, что мы можем взять интеграл в (5.6), найти из него зависимость $t = t(r)$, обратить эту зависимость, получить зависимость $r = r(t)$ и подставив ее в (5.7), взять и этот второй интеграл, получив вторую зависимость $\varphi = \varphi(t)$. Первый интеграл (6) легко взять, сделав замену

$$r = a(1 - e\cos\xi). \tag{5.8}$$

Он дает такую зависимость

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) = (\xi - e\sin\xi)/\omega, \tag{5.9}$$

где частота ω была введена выше. Эти два выражения (5.8,5.9) в неявном виде дают зависимость $r = r(t)$. Зависимость переменной $\varphi = \varphi(\xi)$ определяется формулами (5.4,5.8). Интересно сравнить два выражения для формы траектории (5.4) и (5.8). Уравнение эллипса в форме (5.8) было опубликовано И.Кеплером в 1609 году в его трактате «Новая астрономия, основанная на причинах, или физика неба, представленная исследованиями звезды Марс согласно наблюдениям дворянина Тихо Браге». Смысл переменной ξ ясен из Рис.6, где c – центр эллипса, f – его фокус, и эллипс «охвачен» окружностью с радиусом, равным большой полуоси эллипса.

Поскольку зависимость $\varphi(\xi)$ достаточно громоздкая, то удобно выразить через ξ декартовы координаты движущейся точки. Из (5.4) следует, что $x = (p - r)/e$ и после подстановки (5.8) получаем:

$$x = a(\cos\xi - e), \qquad y = a\sqrt{1-e^2}\sin\xi\,. \tag{5.10}$$

(Вторая формула легко получается при подстановке первой и (5.8) в соотношение $y = \sqrt{r^2 - x^2}$).

Наиболее просто полученные формулы выглядят в пределе малого эксцентриситета $e \ll 1$. При этом из (5.9) имеем $\xi \approx \omega t$, т.е. эта переменная приобретает смысл фазы вращения тела по траектории, и временные зависимости всех координат выражаются в виде явных функций:

$$r \approx a - ae\cos\omega t\,, \qquad \varphi \approx \omega t + 2e\sin\omega t\,. \tag{5.11}$$

Т.е. тело движется почти по окружности с почти постоянной угловой скоростью. Малые периодические девиации радиуса и фазы пропорциональны малому параметру $e \ll 1$